Esercizi di calcolo combinatorio e probabilità
Svolgimento a cura di Mattia Puddu

1. Gli interi da 1 a 9 sono scritti nelle 9 caselle di una scacchiera 3x3, ogni intero in ogni casella diversa, in modo tale che ogni coppia di numeri consecutivi sia scritta in due caselle adiacenti. Quanti sono i valori possibili del numero posto sulla casella centrale?
2. In un torneo di pallacanestro 8 squadre sono divise in 2 gruppi di 4 squadre ciascuno. Al termine degli incontri preliminari, si disputano le semifinali, in cui la prima classificata del primo gruppo incontrerà la seconda classificata del secondo gruppo e la prima classificata del secondo gruppo incontrerà la seconda classificata del primo gruppo. Se le squadre del primo gruppo sono A, B, C, D, e quelle del secondo gruppo sono E, F, G, H, qual è la probabilità che gli incontri di semifinale siano A contro E e B contro G?
3. In un paese l'1% della popolazione è affetto da una certa malattia. Il test per sapere se si è contagiati sbaglia nell'1% dei casi. Lorenzo si sottopone al test e risulta malato. Qual è la probabilità che sia sano?
4. Una scatola contiene 3 palline bianche e 2 nere. Marco estrae una pallina e la rimette nella scatola aggiungendo un'altra pallina dello stesso colore. A questo punto egli estrae una nuova pallina dalla scatola. Qual è la probabilità che questa sia bianca?
5. Qual è il minimo numero di lanci di un dado a 6 facce affinché si abbia una probabilità superiore al 50% che la somma dei punteggi sia maggiore o uguale a 48?
6. A una gara a punti su pista partecipano nove concorrenti. A ogni traguardo intermedio vengono assegnati 9 punti al primo, 8 al secondo, 7 al terzo e così via fino ad assegnare un punto all'ultimo. Prima dell'ultimo sprint (in cui il punteggio assegnato vale doppio) la classifica vede al comando Abdujaparov con 2 punti di vantaggio su Boardman e 9 su Cipollini. Gli altri concorrenti hanno ormai un distacco di punti tale da non consentire più loro di aggiudicarsi la gara. Quanti sono i possibili differenti piazzamenti dei tre corridori nell'ultimo sprint che permettono a Cipollini di vincere la gara?
7. Tre amici partecipano a 6 gare; chi vince la prima guadagna un punto, che vince la seconda due, e così via. Sapendo che ognuno dei tre ha vinto due gare, qual è la probabilità che tutti abbiano ottenuto lo stesso punteggio?
8. Dato un cubo, quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre vertici di C e che non giacciono su nessuna delle facce di C?
9. In Italia le targhe automobilistiche sono composte da 2 lettere, seguite da 3 cifre e da altre 2 lettere. Nel paese di Ailati le cose vanno alla rovescia e le targhe sono composte da 2 cifre, seguite da 3 lettere e da altre 2 cifre. Supponendo che in entrambi i paesi si usano 10 cifre e 22 lettere, determinare la differenza tra il numero di tutte le targhe possibili nei due paesi.
10. Da un sacchetto della tombola contenente i numeri da 1 a 90 estraiamo contemporaneamente due numeri. Qual è la probabilità che la somma faccia 56?
11. Durante una festa 3 ragazzi e 3 ragazze si siedono casualmente attorno a un tavolo rotondo. Qual è la probabilità che non ci siano due persone dello stesso sesso sedute a fianco?
12. Alberto e Barbara giocano con un dado. Dopo un po' si accorgono che il dado è truccato, e che il numero 1 esce più frequentemente degli altri numeri, che invece restano equiprobabili. Decidono quindi che, quando esce 1, quel tiro è annullato e si tira di nuovo. Se si continua a lanciare il dado fino a quando non si ottengono 2 tiri validi, qual è la probabilità che la somma dei due numeri validi usciti sia 8?

13. In quanti modi si possono ordinare le cifre 1, 2, 4, 7 e 9 affinché formino un numero di 5 cifre divisibile per 11?
14. Alberto, Barbara e Carlo stanno giocando a carte. Ad ogni mano, il vincitore guadagna 2 punti, mentre gli altri perdono un punto a testa. Inizialmente tutti hanno 0 punti. Qual è la probabilità che dopo 10 mani siano nuovamente tutti a 0?
15. Matteo deve fare un test a crocette con 11 domande. Ciascuna domanda ha una sola risposta esatta. La prima domanda ha due possibili risposte, la seconda tre, e così via fino all'undicesima che ne ha 12. Qual è la probabilità che facendo a caso il test Matteo dia almeno una risposta giusta?
16. Dire quante sono le frazioni $0 < \frac{m}{n} < 1$ ridotte ai minimi termini tali che mn=20!
17. Risolvere l'equazione: $4\binom{x}{4} = 15\binom{x-2}{3}$
18. Il signor Rossi ha dimenticato il codice segreto abbinato alla sua tessera bancomat. Ricorda che comincia per 1, che le altre quattro cifre sono 2,5,6,9 (ma non in che ordine), e che la cifra centrale è dispari. Quanti tentativi dovrebbe fare al massimo per ritrovare la password?
19. Quanti sono i numeri di 9 cifre contenenti 3 volte la cifra 1, 3 volte la cifra 2 e 3 volte la cifra 3?
20. Quanti sono i numeri di 5 cifre non contenenti lo 0 e aventi due cifre uguali a 1?
21. Da un mazzo di 40 carte se ne prendono 3. Qual è la probabilità che vi sia un solo asso?
22. Considera la stessa situazione del caso precedente: qual è la probabilità che vi sia almeno un asso?
23. Quanti numeri di 4 cifre distinte si possono formare?
24. Quanti sono i numeri di 4 cifre, <5000 multipli di 5, formati dalle cifre 2, 3, 4, 5?
25. Quante schedine occorre giocare al superenalotto per fare sicuramente 6?
26. In una classe di 24 alunni si devono eleggere i 2 rappresentanti di classe. In quanti modi diversi si può fare questa scelta?
27. Qual è il numero massimo di termini che può comparire in un polinomio omogeneo di terzo grado nelle 4 variabili x, y, z, t.
28. Da un'urna contenente 6 palline bianche e 9 blu se ne estraggono 2 contemporaneamente. Qual è la probabilità che siano entrambe bianche?
29. Considera l'esercizio precedente: qual è la probabilità che le palline estratte siano una blu e una bianca?
30. Calcola la probabilità che il primo numero del lotto estratto sulla ruota di Napoli sia un numero dispari o un multiplo di 18.
31. 12 persone si stringono la mano, ciascuna stringe la mano a tutte le altre. Quante sono le strette di mano in totale?
32. Un cartolaio ha nel suo negozio tre cassetti liberi: vuole sistemare in tali cassetti le biro nere, blu e rosse suddivise secondo i colori. In quanti modi diversi può disporre le penne nei cassetti?
33. Quanti numeri di 9 cifre tutte diverse tra loro (e diverse da 0) si possono scrivere?
34. Le disposizioni di un certo numero di oggetti a 5 a 5 sono tante quante le disposizioni degli stessi oggetti a 4 a 4. Determina il numero degli oggetti.
35. Quanti sono i numeri di 6 cifre che hanno le prime 3 cifre dispari e le restanti pari?

36. In una classe di 20 studenti si devono formare una squadra di calcio da 11 e una da basket da 5 giocatori. In quanti modi si possono formare se nessuno studente può appartenere a entrambe?

37. Calcolare: $\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}$

38. In quanti modi si possono disporre 3 ragazzi e 3 ragazze per una foto di gruppo, sistemando i ragazzi accovacciati e le ragazze in piedi dietro di loro?

39. Ho a disposizione cinque cifre uguali a 1 e una cifra uguale a 2. Usando tutte o alcune di queste cifre, quanti numeri naturali posso costruire.

40. Due matematici, tre fisici e cinque ingegneri sono seduti in prima fila ad una conferenza. In quanti modi si possono disporre se quelli dello stesso corso devono sedersi vicini?

41. Quante sono le terne ordinate di interi non negativi tali che a+b+c=57?

42. Alessio ha un tavolo rotondo con sei sedie tutte diverse. Si domanda quante sono le diverse disposizioni delle sedie attorno al tavolo.

43. Ad un torneo partecipano 10 squadre: la formula della manifestazione prevede la disputa di quattro incontri tra ciascuna coppia di squadre A,B: due nella sede della squadra A e due nella sede della squadra B. Quanti incontri si giocheranno?

44. Risolvere l'equazione: $\binom{x}{3} = \binom{x}{5}$

Svolgimento

45. Gli interi da 1 a 9 sono scritti nelle 9 caselle di una scacchiera 3x3, ogni intero in ogni casella diversa, in modo tale che ogni coppia di numeri consecutivi sia scritta in due caselle adiacenti. Quanti sono i valori possibili del numero posto sulla casella centrale?

    Notiamo che se coloriamo la scacchiera di bianco e di nero, come nella maniera classica, ci sono 5 caselle nere e 4 bianche, e la centrale è nera. Poiché come i colori sono disposti in maniera alternata (bianco/nero), lo sono anche i pari con i dispari è evidente che nelle caselle nere (che sono 5) si dovranno collocare i 5 numeri dispari. Pertanto i valori possibili del numero posto nella casella centrale è 5.

46. In un torneo di pallacanestro 8 squadre sono divise in 2 gruppi di 4 squadre ciascuno. Al termine degli incontri preliminari, si disputano le semifinali, in cui la prima classificata del primo gruppo incontrerà la seconda classificata del secondo gruppo e la prima classificata del secondo gruppo incontrerà la seconda classificata del primo gruppo. Se le squadre del primo gruppo sono A, B, C, D, e quelle del secondo gruppo sono E, F, G, H, qual è la probabilità che gli incontri di semifinale siano A contro E e B contro G?

    Poiché le coppie di squadre possibili all'interno di un insieme di quattro squadre sono $\binom{4}{2} = 6$, la probabilità che le due semifinaliste del primo girone siano A e B, e che quelle del secondo girone siano E ed F, è $\frac{1}{6}$. Se questo avviene, la probabilità che A incontri E (e necessariamente B incontri F) è $\frac{1}{2}$. Dunque la probabilità è:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{72}$$

47. In un paese l'1% della popolazione è affetto da una certa malattia. Il test per sapere se si è contagiati sbaglia nell'1% dei casi. Lorenzo si sottopone al test e risulta malato. Qual è la probabilità che sia sano?

    Si hanno due possibilità: o Lorenzo è sano e il test ha sbagliato, o il test è corretto e lui è malato. Il primo evento ha probabilità $\frac{1}{100}\frac{99}{100} = \frac{99}{10000}$, il secondo $\frac{99}{100}\frac{1}{100} = \frac{99}{10000}$. I due eventi sono equiprobabili, quindi la probabilità che lui sia sano è ½ .

48. Una scatola contiene 3 palline bianche e 2 nere. Marco estrae una pallina e la rimette nella scatola aggiungendo un'altra pallina dello stesso colore. A questo punto egli estrae una nuova pallina dalla scatola. Qual è la probabilità che questa sia bianca?

    Se la pallina che estrae la prima volta è nera la probabilità diventa ½ . Se la pallina che estrae la prima volta è bianca la probabilità diventa Se la pallina che estrae la prima volta è bianca la probabilità diventa $\frac{2}{3}$. I due casi non sono equiprobabili (il primo ha probabilità 2/5 il secondo 3/5) dunque la probabilità totale diventa:

$$\frac{3}{5}\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

49. Qual è il minimo numero di lanci di un dado a 6 facce affinché si abbia una probabilità superiore al 50% che la somma dei punteggi sia maggiore o uguale a 48?

    Il punteggio medio di un lancio è di 3,5. Poiché dopo 14 lanci la media è pari a 49, allora 14 lanci sono sufficienti.

50. A una gara a punti su pista partecipano nove concorrenti. A ogni traguardo intermedio vengono assegnati 9 punti al primo, 8 al secondo, 7 al terzo e così via fino ad assegnare un punto all'ultimo. Prima dell'ultimo sprint (in cui il punteggio assegnato vale doppio) la classifica vede al comando Abdujaparov con 2 punti di vantaggio su Boardman e 9 su Cipollini. Gli altri concorrenti hanno ormai un distacco di punti tale da non consentire più loro di aggiudicarsi la gara. Quanti sono i possibili differenti piazzamenti dei tre corridori nell'ultimo sprint che permettono a Cipollini di vincere la gara?

    Notiamo che è necessario che Cipollini recuperi almeno 10 punti a Abdujaparov e 8 a Boardman.
    Se Cipollini vince la gara, guadagna 18 punti, dunque Abdujaparov deve arrivare al massimo al sesto posto (4 possibilità) e Boardman al massimo al quinto (4 possibilità considerando il piazzamento di Abdujaparov), per un totale di 16 possibilità.
    Se Cipollini arriva secondo, terzo o quarto, con ragionamenti analoghi si arriva a vedere che rispettivamente le possibilità sono 9, 4 e 1. In totale dunque 16+9+4+1=30.

51. Tre amici partecipano a 6 gare; chi vince la prima guadagna un punto, che vince la seconda due, e così via. Sapendo che ognuno dei tre ha vinto due gare, qual è la probabilità che tutti abbiano ottenuto lo stesso punteggio?

    Notiamo che ognuno dei tre amici ha fatto sette punti, poiché si devono spartire i 21 totali. Chi ha vinto la prima gara deve necessariamente vincere solo la sesta e questo accade con probabilità 1/5. Analogamente chi vince la seconda vince necessariamente la quinta e questo accade con probabilità 1/3. Il resto è obbligato. La probabilità è dunque di 1/15.

52. Dato un cubo, quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre vertici di C e che non giacciono su nessuna delle facce di C?

    I triangoli possibili sono $\binom{8}{3} = 56$. Da questi togliamo quelli che hanno tre vertici consecutivi che sono $6\binom{4}{3} = 24$. Dunque la soluzione è 56-24=32.

53. In Italia le targhe automobilistiche sono composte da 2 lettere, seguite da 3 cifre e da altre 2 lettere. Nel paese di Ailati le cose vanno alla rovescia e le targhe sono composte da 2 cifre, seguite da 3 lettere e da altre 2 cifre. Supponendo che in entrambi i paesi si usano 10 cifre e 22 lettere, determinare la differenza tra il numero di tutte le targhe possibili nei due paesi.

    Ogni lettera può essere scelta in 22 modi, ogni cifra in 10 modi e ogni scelta di una lettera o di una cifra può essere combinata con qualsiasi altra scelta di cifre e di lettere in altre posizioni. Pertanto le targhe italiane sono $10^3 22^4$ e quelle di Ailati $10^4 22^3$. La differenza risulta essere $10^3 22^3 (22-10) = 10^3 22^3 12$.

54. Da un sacchetto della tombola contenente i numeri da 1 a 90 estraiamo contemporaneamente due numeri. Qual è la probabilità che la somma faccia 56?

Poiché i casi possibili sono $\binom{90}{2} = 4005$ e i casi favorevoli 27 (1+55, 1+54, 1+53, …, 27+29) la probabilità è $\frac{27}{4005} = \frac{3}{445}$

55. Durante una festa 3 ragazzi e 3 ragazze si siedono casualmente attorno a un tavolo rotondo. Qual è la probabilità che non ci siano due persone dello stesso sesso sedute a fianco?

Fissiamo un ragazzo, adesso gli altri si possono disporre in 5! Modi. I modi buoni si ottengono sistemando a destra del ragazzo fissato una delle 3 ragazze, poi uno dei 2 ragazzi rimasti, poi una delle due ragazze rimaste, quindi gli altri due posti sono obbligati: il totale di modi buoni è così 12. La probabilità è 12/120=1/10.

56. Alberto e Barbara giocano con un dado. Dopo un po' si accorgono che il dado è truccato, e che il numero 1 esce più frequentemente degli altri numeri, che invece restano equiprobabili. Decidono quindi che, quando esce 1, quel tiro è annullato e si tira di nuovo. Se si continua a lanciare il dado fino a quando non si ottengono 2 tiri validi, qual è la probabilità che la somma dei due numeri validi usciti sia 8?

I modi possibili di prendere due numeri sono $5 \cdot 5 = 25$. I modi buoni, che ci danno 8 come somma, sono 5 (2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2). La probabilità è di 5/25=1/5.

57. In quanti modi si possono ordinare le cifre 1, 2, 4, 7 e 9 affinché formino un numero di 5 cifre divisibile per 11?

Sapendo che un numero è divisibile per 11 quando la differenza fra la somma delle cifre di posto pari e quelle di posto dispari è multipla di 11, chiamiamo A la somma delle cifre di posto dispari, e B quella delle cifre di posto pari. Si ha A+B=23, ma questo implica che A-B sia dispari, e dunque diverso da 0. L'unico valore possibile è 11. Ma allora A-B=23-B-B=23-2B=11 -> 2B=12 -> B=6. L'unico modo di ottenerlo è usare i numeri 2 e 4. Vi sono dunque 2! modi di fissare le cifre di posto pari e 3! per quel di posto dispari per un totale di 2!3!=12

58. Alberto, Barbara e Carlo stanno giocando a carte. Ad ogni mano, il vincitore guadagna 2 punti, mentre gli altri perdono un punto a testa. Inizialmente tutti hanno 0 punti. Qual è la probabilità che dopo 10 mani siano nuovamente tutti a 0?

Sia v il numero di mani vinte dal primo giocatore e p il numero di mani perse. Sappiamo che v+p=10, e che 2v-p=0. Ma il sistema:

$$\begin{cases} v + p = 10 \\ 2v - p = 0 \end{cases}$$

è irrisolvibile negli interi (si ottiene v=10/3). Dunque la probabilità è 0.

59. Matteo deve fare un test a crocette con 11 domande. Ciascuna domanda ha una sola risposta esatta. La prima domanda ha due possibili risposte, la seconda tre, e così via fino all'undicesima che ne ha 12. Qual è la probabilità che facendo a caso il test Matteo dia almeno una risposta giusta?

La probabilità che le dia tutte sbagliate è di:

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\frac{5}{6}\frac{6}{7}\frac{7}{8}\frac{8}{9}\frac{9}{10}\frac{10}{11}\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$$

Quindi la probabilità cercata è

$$1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

60. Dire quante sono le frazioni $0<\frac{m}{n}<1$ ridotte ai minimi termini tali che mn=20!

Scomponiamo 20! Si ha che:

$$\begin{aligned}20! &= 2^2\cdot 5\cdot 19\cdot 3^2\cdot 2\cdot 17\cdot 2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 7\cdot 13\cdot 2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\\ &= 2^{18}\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\end{aligned}$$

È chiaro che non posso scindere uno di questi fattori, altrimenti la frazione non sarebbe ridotta ai minimi termini. Dunque tutte le frazioni possibili con queste restrizioni sono:

$$\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}=2^8=256$$

Ma la metà di queste ha il numeratore maggiore del denominatore. Dunque il numero di frazioni cercate è:

$$\frac{256}{2}=128$$

61. Risolvere l'equazione:

$$\begin{aligned}&4\binom{x}{4}=15\binom{x-2}{3}\\ &\frac{4x!}{4!\,(x-4)!}=\frac{15(x-2)!}{3!\,(x-5)!}\\ &\frac{x!}{(x-4)!}=\frac{15(x-2)!}{(x-5)!}\\ &\frac{x!}{x-4}=15(x-2)!\\ &\frac{x(x-1)}{x-4}=15\\ &x^2-x=15x-60\\ &x^2-16x+60=0\\ &x=8\pm\sqrt{4}=8\pm 2=10\ \vee 6\end{aligned}$$

62. Il signor Rossi ha dimenticato il codice segreto abbinato alla sua tessera bancomat. Ricorda che comincia per 1, che le altre quattro cifre sono 2,5,6,9 (ma non in che ordine), e che la cifra centrale è dispari. Quanti tentativi dovrebbe fare al massimo per ritrovare la password?

La cifra centrale può essere scelta in 2 modi. Adesso la seconda in 3, la quarta in 2 e la quinta è obbligata. In totale dovrà fare 12 tentativi.

63. Quanti sono i numeri di 9 cifre contenenti 3 volte la cifra 1, 3 volte la cifra 2 e 3 volte la cifra 3?
    Piazziamo gli 1: si fa in $\binom{9}{3}$ modi.
    Piazziamo i 2: si fa in $\binom{6}{3}$ modi.
    I tre hanno i posti obbligati. I numeri cercati sono:
$$\binom{9}{3}\binom{6}{3} = \frac{9!\,6!}{3!\,6!\,3!\,3!} = 1680$$

64. Quanti sono i numeri di 5 cifre non contenenti lo 0 e aventi due cifre uguali a 1?

    Piazziamo gli 1: lo possiamo fare in $\binom{5}{2} = 10$ modi.
    Gli altri tre numeri si scelgono ognuno in 8 modi. Il numero totale cercato è $8^3 * 10 = 5120$

65. Da un mazzo di 40 carte se ne prendono 3. Qual è la probabilità che vi sia un solo asso?
    I casi possibili sono:
$$\binom{40}{3} = 9880$$
    I casi favorevoli sono:
$$\binom{36}{2} \cdot 4 = 2520$$
    La probabilità è dunque:
$$\frac{2520}{9880} = \frac{252}{988} = \frac{126}{494} = \frac{63}{247}$$

66. Considera la stessa situazione del caso precedente: qual è la probabilità che vi sia almeno un asso?
    Consideriamo la probabilità di non pescare alcun asso, quella cercata è complementare a questa.
    I casi possibili sono nuovamente 9880.
    Quelli favorevoli sono:
$$\binom{36}{3} = 7140$$
    La probabilità cercata è dunque:
$$1 - \frac{7140}{9880} = \frac{2740}{9880} = \frac{274}{988} = \frac{137}{494}$$

67. Quanti numeri di 4 cifre distinte si possono formare?
    La prima cifra può essere scelta in 9 modi (si esclude lo 0), la seconda ancora in 9 (si esclude la precedente ma si include lo 0), la terza in 8 e la quarta in 7. In totale abbiamo:
    $81 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ numeri.

68. Quanti sono i numeri di 4 cifre, <5000 multipli di 5, formati dalle cifre 2, 3, 4, 5?
    L'ultima cifra può essere scelta in un solo modo (5), la prima in 3 la seconda in 4 e la terza in 4.
    In totale:
    $3 \cdot 4^2 = 48$ numeri

69. Quante schedine occorre giocare al superenalotto per fare sicuramente 6?
    Basta giocare tutti i modi di scegliere 6 numeri all'interno dei 90 ossia:

$$\binom{90}{6} = 622614630$$

70. In una classe di 24 alunni si devono eleggere i 2 rappresentanti di classe. In quanti modi diversi si può fare questa scelta?

$$modi = \binom{24}{2} = 276$$

71. Qual è il numero massimo di termini che può comparire in un polinomio omogeneo di terzo grado nelle 4 variabili x, y, z, t.
Si tratta di scegliere 3 tra le 4 variabili anche con ripetizioni:

$$C'_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$$

72. Da un'urna contenente 6 palline bianche e 9 blu se ne estraggono 2 contemporaneamente. Qual è la probabilità che siano entrambe bianche?
Casi possibili:

$$\binom{15}{2} = 105$$

Casi favorevoli:

$$\binom{6}{2} = 15$$

Probabilità:

$$\frac{15}{105} = \frac{1}{7}$$

73. Considera l'esercizio precedente: qual è la probabilità che le palline estratte siano una blu e una bianca?
Casi possibili: 105
Casi favorevoli:

$$\binom{6}{1}\binom{9}{1} = 6 \cdot 9 = 54$$

Probabilità:

$$\frac{54}{105} = \frac{18}{35}$$

74. Calcola la probabilità che il primo numero del lotto estratto sulla ruota di Napoli sia un numero dispari o un multiplo di 18.
La probabilità che il numero sia dispari è:

$$\frac{1}{2}$$

La probabilità che il numero sia multiplo di 18 è:

$$\frac{5}{90} = \frac{1}{18} \quad (sono\ 5\ i\ multipli\ di\ 18\ fra\ 1\ e\ 90)$$

La probabilità è dunque:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

75. 12 persone si stringono la mano, ciascuna stringe la mano a tutte le altre. Quante sono le strette di mano in totale?

$$\binom{12}{2} = 66$$

76. Un cartolaio ha nel suo negozio tre cassetti liberi: vuole sistemare in tali cassetti le biro nere, blu e rosse suddivise secondo i colori. In quanti modi diversi può disporre le penne nei cassetti?

$$3! = 6$$

77. Quanti numeri di 9 cifre tutte diverse tra loro (e diverse da 0) si possono scrivere?

$$9! = 362880$$

78. Le disposizioni di un certo numero di oggetti a 5 a 5 sono tante quante le disposizioni degli stessi oggetti a 4 a 4. Determina il numero degli oggetti.

$$D_{n,5} = D_{n,4} \rightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = \frac{n!}{(n-4)!} \rightarrow (n-5)! = (n-4)!$$

$$1 = n - 4 \rightarrow n = 5$$

79. Quanti sono i numeri di 6 cifre che hanno le prime 3 cifre dispari e le restanti pari?
    Le combinazioni delle prime tre cifre sono:

$$\binom{5}{3} = 10$$

   Le combinazioni delle ultime tre cifre sono:

$$\binom{5}{3} = 10$$

   Dunque i numeri sono 100.

80. In una classe di 20 studenti si devono formare una squadra di calcio da 11 e una da basket da 5 giocatori. In quanti modi si possono formare se nessuno studente può appartenere a entrambe?
    Formiamo la squadra di calcio in:

$$\binom{20}{11} = 39916800$$

   Quella da basket in:

$$\binom{9}{5} = 126$$

   I modi sono:

$$126 \cdot 39916800$$

81. Calcolare:

$$\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i}$$

   Per definizione:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

   Dunque:

$$\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} = 2^6 = 64$$

82. In quanti modi si possono disporre 3 ragazzi e 3 ragazze per una foto di gruppo, sistemando i ragazzi accovacciati e le ragazze in piedi dietro di loro?
    I ragazzi li sistemiamo in 3!=6 modi, le ragazze in altrettanti 6 modi. In totale fanno 36 modi di sistemarli.

83. Ho a disposizione cinque cifre uguali a 1 e una cifra uguale a 2. Usando tutte o alcune di queste cifre, quanti numeri naturali posso costruire.
    Se non uso il 2 posso formare 5 numeri.
    Se uso il 2 posso costruire:
    un numero da una cifra (2), due da due cifre, tre da tre, … per un totale di:

$$5 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 26$$

84. Due matematici, tre fisici e cinque ingegneri sono seduti in prima fila ad una conferenza. In quanti modi si possono disporre se quelli dello stesso corso devono sedersi vicini?
Formiamo 3 blocchi. Essi si permutano in 3!=6 modi.
Le permutazioni all'interno dei singoli blocchi sono: 2!=2, 3!=6, 5!=120. In totale fanno:

$$120 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 8640$$

85. Quante sono le terne ordinate di interi non negativi tali che a+b+c=57?
Si tratta di trovare i modi in cui disporre 57 unità in tre "cassetti", o meglio di decidere in quali punti inserire due separatori fra la fila di 57 unità. Si può fare in:

$$\binom{59}{2} = 1711$$

86. Alessio ha un tavolo rotondo con sei sedie tutte diverse. Si domanda quante sono le diverse disposizioni delle sedie attorno al tavolo.
Di per sé i modi possibili sono 6!=720. Però a partire da una permutazione ce ne sono altre 5 uguali ottenibili mediante rotazione. Pertanto i modi di disporle sono:

$$\frac{6!}{6} = 5! = 120$$

87. Ad un torneo partecipano 10 squadre: la formula della manifestazione prevede la disputa di quattro incontri tra ciascuna coppia di squadre A,B: due nella sede della squadra A e due nella sede della squadra B. Quanti incontri si giocheranno?
Sono liste ordinate: consideriamo le disposizioni.
Tra andata e ritorno abbiamo:

$$2D_{10,2} = 2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$$

88. Risolvere l'equazione:

$$\binom{x}{3} = \binom{x}{5}$$
$$\frac{x!}{6(x-3)!} = \frac{x!}{120(x-5)!}$$
$$(x-3)! = 20(x-5)!$$
$$(x-3)(x-4) = 20$$
$$x^2 - 7x - 8 = 0$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2}$$
$$x = 8 \lor x = -1$$
$$x = -1 \; non \; accettabile$$
$$x = 8$$